

Запропоновано метод пошуку оптимального управління технологічними процесами, заснований на аналізі рішення системи диференціальних рівнянь (СДР), яка є математичною моделлю керуваного процесу. Показано, що отримані при цьому рішення узгоджуються з принципом максимуму Понтрягіна для задачі про швидкодію, але відкриваються додаткові можливості в управлінні кінцевим станом. Запропоновано спосіб мультиальтернативного параметричного опису кінцевого стану

Ключові слова: оптимальне керування технологічними процесами, принцип максимуму Понтрягіна, швидкодія, лінія кінцевого стану, мультиальтернативний опис кінцевого стану, рідж-аналіз

Предложен метод поиска оптимального управления технологическими процессами, основанный на анализе решения системы дифференциальных уравнений (СДУ), являющейся математической моделью управляемого процесса. Показано, что получаемые при этом решения согласуются с принципом максимума Понтрягина для задачи о быстродействии, но открываются дополнительные возможности в управлении конечным состоянием. Предложен способ мультиальтернативного параметрического описания конечного состояния

Ключевые слова: оптимальное управление технологическими процессами, принцип максимума Понтрягина, быстродействие, линия конечного состояния, мультиальтернативное описание конечного состояния, ридж-анализ

УДК 681.5:519.24
DOI: 10.15587/1729-4061.2017.105294

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИ- АЛЬТЕРНАТИВНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Д. А. Дёмин

Доктор технических наук, профессор
Кафедра литейного производства
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

1. Введение

Поиск оптимального управления для конкретных технических приложений требует обоснованного выбора наиболее целесообразных для данных объектов методов. Говоря об управлении промышленными объектами и соответствующими технологическими процессами, необходимо учитывать, что такой выбор должен предполагать возможность учета ряда неопределенностей. Понятно, что такие неопределенности накладываются условиями функционирования объектов управления или спецификой их эксплуатации. Однако, делая выбор в пользу того или иного метода, следует учитывать еще одно обстоятельство – рассматривается ли конкретная задача с позиции инженерии или с позиции математической теории управления. Наличие очевидного, иногда «конкурирующего», дуализма в данном вопросе требует дополнительного исследования ряда принципиальных для успешного поиска оптимального управления аспектов.

В этой связи следует отметить такие ключевые направления, как выбор критерия оптимальности управления [1], структуры математического описания объекта управления [2–4], обоснования эффективности оценивания отдельной операции при реализации выбранного управления [5–7], неопределенность в

оценивании переменных состояния [8], порождающую необходимость их нечеткого описания [9–11]. Все названные аспекты больше относятся к прикладной тематике в решении проблем оптимизации управления, развиваемых, в большей части, именно в рамках инженерии для конкретных технических задач. Основными же объектами исследования в области математической теории управления являются непосредственно методы поиска оптимального управления, в частности совершенствования доказательной базы о необходимых и достаточных условиях существования оптимальных решений. В этой связи нельзя не отметить одно интересное обстоятельство. Несмотря на активное развитие новых направлений решения оптимизационных задач в области управления, например, использование генетических алгоритмов или искусственных нейронных сетей, очень востребованными для исследований являются именно классические методы поиска оптимального управления. К ним, в частности, относится и принцип максимума Понтрягина, позволяющий решать широкий класс задач для объектов, описываемых системами линейных или нелинейных дифференциальных уравнений, для поиска оптимального управления процессами с распределенными параметрами и дискретными процессами. Подтверждением этому могут быть труды, посвященные развитию принципа

максимума для целого ряда приложений: поиску оптимального управления технологическими процессами [12–14], транспортом – в сфере его создания и эксплуатации [15–18], при проектировании конструкций в энергетике [19, 20], в области экономики [21].

Все приведенные выше аргументы позволяют говорить об актуальности тематики исследований, посвященных совершенствованию методов поиска оптимального управления, причем как в прикладном аспекте, так и с точки зрения развития математической теории управления.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В исследовании [1] показано, что обоснованных правил выбора универсального критерия оптимальности управления на сегодня не существует, а общей практикой является самостоятельное «назначение» некоторого показателя на роль критерия эффективности. При этом поиск оптимального управления вызывает необходимость учитывать то обстоятельство, что достижение стратегической цели управления обеспечивается формированием последовательности технологических операций в рамках исследуемого интервала времени. Ориентиром для выбора наиболее выгодного технологического процесса является именно технологическая операция со своим, локальным, максимальным показателем эффективности, который может быть использован в качестве единого критерия оптимального управления. Таким образом, выбор критерия оптимальности управления предполагает необходимость наличия частных моделей, описывающих объект управления. Это обстоятельство отмечено и в работах [2–4], в которых говорится, в частности, что математические модели, применяемые в системах управления сложными энерготехнологическими комплексами, обладают рядом специфических особенностей, суть которых состоит в отражении в их структуре «локальных» принципов построения. Такая «локальность» понимается в смысле построения ряда частных моделей и выявления основных взаимосвязей между ними вместо построения общей модели. Обоснование целесообразности такого подхода авторы находят в том, что любая модель является односторонней, а в сложном процессе всестороннее моделирование достигается построением множества односторонних, но взаимосвязанных моделей. При этом разработка модели объекта управления рассматривается как многоэтапный условно-экстремальный целенаправленный процесс, который может быть сформулирован в виде задачи оптимизации функционала $\text{opt } F(X, Y, Z, Q, B, S, T)$ при выполнении множества условий, накладываемых спецификой эксплуатации объекта управления. В данном функционале где X – вектор входов, Y – пространство выходов, Q – пространство ограничений на процессы машинного исследования, B – ограничения на объект проектирования по специфическим требованиям, накладываемым условиями эксплуатации, и ограничения, накладываемые на требования к чувствительности систем измерительной техники, эксплуатационной надежности, энергоёмкости, S – пространство реакции процесса проектирования на

воздействия окружающей среды, T – время, F – условный оператор.

Понятно, что структура подобного функционала отображает взаимосвязи, процессы, характеристики и параметры энергоэкономического и управленческого характера. В сочетании с разработкой критерия эффективности использования ресурсов, как составляющей критерия оптимальности управления, это позволяет идентифицировать объект управления и определить самую эффективную целевую операцию. Развитие таких взглядов может быть найдено в работах [5–7], где показано, как для управляемых систем могут быть выделены классы простых целевых операций и оценена их эффективность с точки зрения формирования общего критерия оптимальности управления.

В случае же неопределенности в описании переменных состояния необходима их математическая формализация. Как ее варианты, возможны методы теории приближенных множеств Павлака [8] или нечеткий регрессионный анализ [9–11]. Первый позволяет на основе итоговых экспертных оценок о состоянии системы и объективных или субъективных оценках ее параметров строить алгоритмы прогнозирования на основе процедур логического вывода. Второй базируется на использовании нечеткого регрессионного анализа, в том числе с применением искусственной ортогонализации результатов пассивного эксперимента, для построения математического описания связи выходных и входных переменных, являющихся нечеткими числами [9–11].

Описанные работы позволяют увидеть ряд принципиальных аспектов, касающихся противоречивости требований, предъявляемых к критериям качества управления, и объективной сложности адекватного математического описания. Особенно это касается промышленных объектов, функционирующих в условиях существенной неопределенности. Несмотря на то, что данные труды не содержат законченных алгоритмов синтеза оптимального управления для конкретных приложений, их результаты являются очень полезными. В первую очередь это связано с обоснованными в них подходами к формированию принципов рассмотрения реальных технологических объектов, для которых решаются задачи поиска оптимального управления.

Особый интерес могут представлять исследования, посвященные математическому описанию задач оптимального управления для тех промышленных объектов, которые могут функционировать в нескольких технологических режимах. Очевидно, что этот интерес обоснован повсеместностью эксплуатации именно таких технологических объектов, а требования отыскания оптимальных программ управления для них предполагают решение задачи о быстродействии. Традиционно это делается с использованием принципа максимума Понтрягина, находящего активное развитие в трудах, посвященных математической теории управления. Среди ключевых аспектов исследования принципа максимума именно в рамках развития этой теории, могут быть выделены направления, посвященные исследованиям условий трансверсальности [22–24], оптимальному управлению детерминированной системой с дискретным временем и импульсному управлению со смешанными ограничениями [25, 26],

необходимым условиям оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке [27, 28].

В частности, в работе [22] приведен краткий геометрический анализ принципа максимума Понтрягина и проанализированы такие ключевые понятия, как разделяющие гиперплоскости, краевые условия и минимизаторы. Показано, что все они имеют естественные контактно-геометрические интерпретации, позволяющие получать простой вывод условий трансверсальности для оптимального по конечному состоянию управления. Принципы максимума Понтрягина для оптимальной задачи управления Майера для системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением, установлены в работе [23]. Особенности приводимых решений связаны с тем, что функции управления представляются кусочно-непрерывными, а функции состояния кусочно-непрерывно дифференцируемы. При этом использован метод Мишеля для управляемых систем, описываемых обычными дифференциальными уравнениями, но с учетом свойств резольвенты линейного функционально-дифференциального уравнения.

В работе [24] представлен и обсуждается принцип максимума для задач управления с ограниченным горизонтом, причем в качестве целевой функции выбрана стоимость, формируемая в конечном состоянии системы. В этом смысле критерий качества управления совпадает с критерием, выбранным в работе [22], однако акцент на геометрической интерпретации не делается. Вместо него для решения задачи управления конечным состоянием представлены необходимые условия оптимальности в виде сопряженных уравнений Гамильтона, но с учетом нового условия трансверсальности. Отличительной особенностью поиска такого управления является то, что выдвигаются требования к траектории состояния по их асимптотической устойчивости, причем точка равновесия ограничивается заданным замкнутым множеством. Показано, что полученные условия могут быть также расширены на импульсные задачи управления, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями, полученными на основе измерений. При этом важная роль отводится концепции решения, строящегося на понятии равновесия, вводимого для такого класса задач.

Применение принципа максимума Понтрягина для решения задачи оптимального управления непрерывной детерминированной системой и дискретного принципа максимума для решения задачи оптимального управления детерминированной системой с дискретным временем рассмотрено в работе [25]. Отмечая существенный недостаток принципа максимума, связанный с необходимостью трансформации задачи оптимального управления в двухточечную краевую, представлен альтернативный подход. Он основан на стохастической модификации принципа максимума, как для непрерывных, так и для дискретно-временных систем. С использованием предлагаемого метода выводятся стратегии оптимального управления, результаты применения которых согласуются с результатами, полученными с помощью стохастического динамического программирования. Необходимо отметить, что авторы используют понятия стратегии осторожного управле-

ния линейной стохастической системой, основанной на принципе стохастического минимума. При этом замена всех случайных величин на их математические ожидания, приводящая к эквивалентной стратегии, обеспечивает возможность получения тех же результатов, что и при использовании динамического программирования. Очевидно, расширение класса рассматриваемых объектов управления и учет дополнительных ограничений, накладываемых на них, дало бы возможность расширения полученных решений в область конкретных технологических приложений. Акцент на эту сторону сделан в работе [26], в которой, в частности, выведены необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина для задач импульсного управления со смешанными ограничениями. Введена новая математическая концепция импульсного управления как требование согласованности импульсной структуры. Кроме того, эта концепция управления позволяет учитывать инженерные потребности при рассмотрении обычного управляющего воздействия при развитии импульса. Следует отметить то обстоятельство, что предположение о регулярности, при котором доказывается принцип максимума, слабее, чем в известных исследованиях. Однако в доказательстве используются вариационный принцип Экекланда и прерывное изменение переменной времени Лебега [26].

В работе [27] исследуются необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель не обязательно экспоненциального вида. Обсуждаются предположения, гарантирующие при этом необходимость как условия типа Мишеля (Michel condition) для максимизированного гамильтониана, так и предложенной для сопряженной переменной формулы типа Коши. Показано, что благодаря такому подходу принцип максимума дополняется до полной системы соотношений.

В работе [28] обсуждается проблема того, что пространственная модель, описываемая системой параболического типа и предназначенная для поиска оптимального управления с бесконечным горизонтом, хоть и решается посредством динамического программирования, не может быть решена с использованием принципа максимума Понтрягина. Точнее, условия Понтрягина, хоть и являются необходимыми, не позволяют определить единственное решение задачи оптимального управления. Авторы данной работы показывают, что такой вывод не является целиком оправданным и должен быть пересмотрен. В частности, если вводится условие трансверсальности типа Мишеля и учитывается тот факт, что сопряженная переменная должна быть неотрицательной, принцип максимума способен дать единственное решение для рассматриваемой математической модели.

Приведенные результаты работ [22–28] позволяют констатировать тот факт, что существует несколько перспективных направлений исследований, посвященных принципу максимума. Однако, развивая математический аппарат принципа максимума, в них не делается акцент на прикладные направления его применения в области управления технологическими процессами. Здесь следует отметить, что при

синтезе оптимального управления с использованием принципа максимума, необходимо учитывать, являются ли технологические процессы периодическими или непрерывными. Характер технологических процессов формирует разные ограничения при решении задачи поиска оптимального управления. Например, в работе [29] показано, что при оптимальном управлении аппаратами периодического действия в случае, когда его производительность ограничивает производительность всего производства, необходимо минимизировать продолжительность цикла. При отсутствии же такого ограничения, достаточно максимизировать удельный выход готового продукта. Отмечено, что применение принципа максимума для решения этих задач в условиях межфазных переходов требует управления константами кинетического уравнения, описывающего в этих условиях динамическую модель аппаратов периодического действия. Приводится краткое описание принципа работы алгоритма процесса при оптимальных нестационарных значениях этих констант, называемых форм-факторами. Последние, как отмечается в данной работе, зависят от переменных состояния, характеризующих начальные условия процесса межфазных переходов. Однако математическая реализация алгоритма поиска оптимального управления не приводится.

В работе [30] сформулирована одна из основных задач оптимального управления процессом нестационарного термоэлектрического охлаждения, которая заключается в определении оптимальной зависимости тока питания от времени, обеспечивающей минимум температуры охлаждения. Для решения этой задачи предложен метод дискретизации математической модели процесса нестационарного термоэлектрического охлаждения по координате, что позволяет применить принцип максимума Понтрягина для расчета оптимальных функций управления. Тем не менее, акцент в исследовании сделан на построении модели, в отношении же поиска оптимального управления сказано лишь, что задача решалась численным методом с помощью итерационного алгоритма, реализованного в среде Matlab.

Альтернативный способ и алгоритм управления процессом каталитического риформинга путем оптимального распределения значений входных переменных процесса приведен в работе [31]. Для решения задачи оптимизации использован способ на основе метода нелинейной оптимизации Хука-Дживса, дополненного процедурой контроля границ варьируемых параметров. В качестве настроек на вход алгоритма оптимизации передаются вектора, описывающие верхние и нижние границы оптимизируемых переменных. Для минимизации ошибки расчета оптимальных режимов, перед вводом исходных данных, алгоритм оптимизации инициирует уточнение настроечных коэффициентов, учитывающих активность катализатора в математической модели. После этого циклически для каждого реактора начинает рассчитываться температура реакционной смеси на входе, обеспечивающая максимальное, с учетом принятых ограничений, приращение ароматических углеводородов на выходе реактора. Однако сравнение с классическими алгоритмами поиска оптимального

управления аналогичными процессами в работе не приведено.

Проблема синтеза оптимального управления непрерывными технологическими процессами исследуется в работах [32, 33], в которых отмечаются сложности управления реальными промышленными объектами, связанные с отсутствием возможности получения объективной достоверной информации о процессе в реальном времени. Авторами отмечено, что именно такая ситуация и имеет место в условиях реальной эксплуатации промышленных объектов. Следует отметить также, что отсутствие обоснованных аргументов относительно целесообразности выбора того или иного критерия качества управления, наиболее актуального для данных условий и требований производства, усложняет процесс поиска оптимального управления даже на этапе его математического конструирования [34]. Понятно, что особое значение в контексте этого имеет возможность измерения или какой-либо другой адекватной оценки переменных состояния. Это обстоятельство отмечено в работе [35] и развивающей ее идеи работе [36]. В частности, показано, что в большинстве практических случаев оперативное управление технологическими процессами осуществляется на основе использования результатов мониторинга производственной ситуации. Последний реализуется путем сбора и первичной обработки данных, включающих в себя результаты применения измерительных средств и комплексов и лабораторные анализы промежуточной и товарной продукции. Результаты анализов, получаемые средствами заводских лабораторий, как правило, не обладают необходимым уровнем полноты и оперативности и практический опыт работы с ними показывает, что и их достоверность в некоторых случаях оказывается неудовлетворительной. Отсюда возникает проблема повышения полноты, оперативности и достоверности информационного обеспечения технологического персонала путем создания и внедрения системы виртуального мониторинга. Основная идея его состоит в получении новых знаний о текущем состоянии технологического процесса и динамике его эволюции путем глубокой математической обработки оперативных и ретроспективных данных, полученных уже существующими контрольно-измерительными средствами (КИС).

Несмотря на очевидно правильное выявление такой проблемы и рекомендации относительно того, какие направления решений могут быть использованы, математический аппарат и алгоритмы его реализации для синтеза оптимального управления непрерывными технологическими процессами приведен в работе [35] лишь концептуально. Автор работы ограничивается приведением условной схемы взаимодействия виртуальных анализаторов с типовой АСУ ТП, схемой формализации единичного объекта диаграммы структурной модели, векторными схемами основных задач виртуального анализа, функциональной матрицей виртуальных анализаторов и DSS-матрицей систем поддержки принятия решений, а также общим представлением математического инструментария виртуальных анализаторов.

Систематизация результатов приведенных исследований позволяет считать, что существующие под-

ходы к решению проблемы синтеза оптимального управления опираются на выбор конкретного метода. Иными словами, предполагается, что метод уже известен и обоснование его целесообразности не обсуждается. Причем этот вывод справедлив и для прикладных технических и технологических задач, и для задач исследования математического аппарата теории управления.

В рассмотренных вариантах акцент сделан лишь на один из классических методов поиска оптимального управления – принцип максимума Понтрягина. Такой выбор обоснован двумя обстоятельствами. Во-первых, сам метод с точки зрения математического аппарата еще далеко не исчерпал себя как объект специального исследования. Очевидно, полученные в результате таких исследований результаты могут находить прикладные продолжения. Во-вторых, для задач с быстрым действием этот метод является уникальным и его выбор однозначно обоснован в случае синтеза оптимального программного управления периодическими технологическими процессами. Более того, преодоление объективных трудностей, связанных с измерением или адекватным описанием переменных состояния в реальном времени, может способствовать расширению возможностей в сторону применения в управлении непрерывными технологическими процессами. Наконец, следует отметить, что даже при использовании какого-либо альтернативного метода для решения задач такого же класса, для которых приспособлен принцип максимума, в качестве проверки их работоспособности можно воспользоваться результатами, полученными с применением именно принципа максимума.

Среди узких мест в описанных исследованиях, в том числе посвященных принципу максимума как математическому аппарату, следует отметить недостаточность внимания к описанию конечного состояния системы для задач разных классов и его влияния на эффективность получаемых решений. При этом под эффективностью следует понимать возможность выбора оптимальной стратегии поиска оптимального решения в случае наличия нескольких альтернатив в описании конечного состояния.

3. Цели и задачи исследования

Целью работы является исследование возможности синтеза оптимального по быстродействию и конечному состоянию управления технологическими процессами в случае наличия альтернатив в описании конечного состояния системы. Это позволит выбирать лучший в данных условиях вариант управления на основе оперативной информации о реальном текущем состоянии технологической системы как объекта управления.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

- проверить возможность поиска оптимального управления, опираясь лишь на анализ системы дифференциальных уравнений, описывающей математическую модель объекта управления;

- разработать алгоритм описания конечного состояния системы – управляемого технологического процесса.

4. Исследование решений системы дифференциальных уравнений, описывающей математическую модель объекта управления, для поиска оптимального управления

Учитывая то обстоятельство, что выбор метода поиска оптимального управления базируется на специфике конкретной задачи и требованиях к качеству управления, интересен ответ на вопрос, можно ли каким-то простым способом получить оптимальные решения в смысле достижения заданной цели управления. В частности, можно ли путем анализа решений системы дифференциальных уравнений (СДУ) – математической модели объекта управления – найти оптимальное по быстродействию управление системой, переводящее ее за минимальное время из заданного начального в заданное конечное состояние. Традиционно такая задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Для ответа на вопрос о возможности получения более простого решения, целесообразно рассмотреть простую систему вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), t \geq 0, |u(t)| \leq 1, \quad (1)$$

где $x_1(t)$ – координата материальной точки, $x_2(t)$ – скорость перемещения материальной точки, $u(t)$ – управление.

СДУ вида (1) – математическая модель объекта управления и при начальных условиях $x_1(0) = x(0)$, $x_2(0) = \dot{x}(0)$ и конечном состоянии $x_1(T) = x_2(T) = 0$, $T \rightarrow \min$, где T – момент окончания движения, задача поиска оптимального управления известна как задача об успокоении материальной точки [37]. Ее решение с применением принципа максимума Понтрягина представлено на рис. 1.

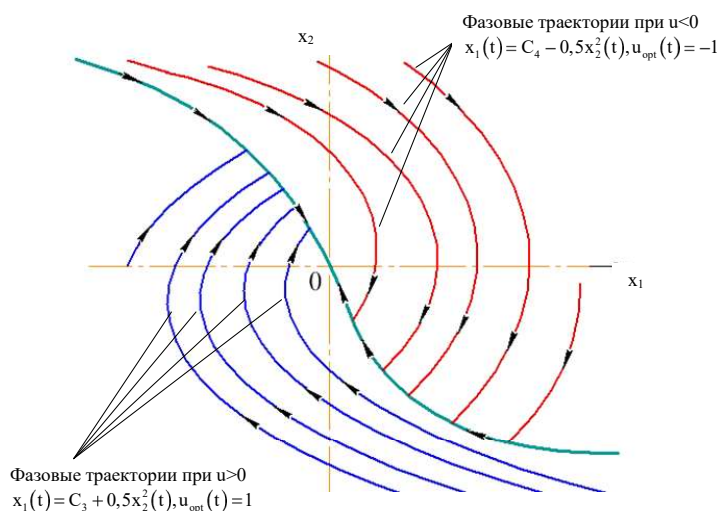


Рис. 1. Решение задачи об успокоении материальной точки с применением принципа максимума Понтрягина: $u_{opt}(t) = \text{sign}(-C_1 t + C_2)$, $u_{opt}(t)$ – оптимальное управление, C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования

Изменение описания конечного состояния приводит к аналогичным выводам относительно получения решения и для примера описания конечного состояния в виде $x_1 = \xi x_2$ и общего вида СДУ (2) при $a_0=1, a_1=1, b=1, \xi=1$ решение имеет вид, представленный на рис. 2 [38, 39].

$$\dot{x}_1(t) = a_0 + a_1 x_2(t), \dot{x}_2(t) = bu(t), t \geq 0, |u(t)| \leq 1. \quad (2)$$

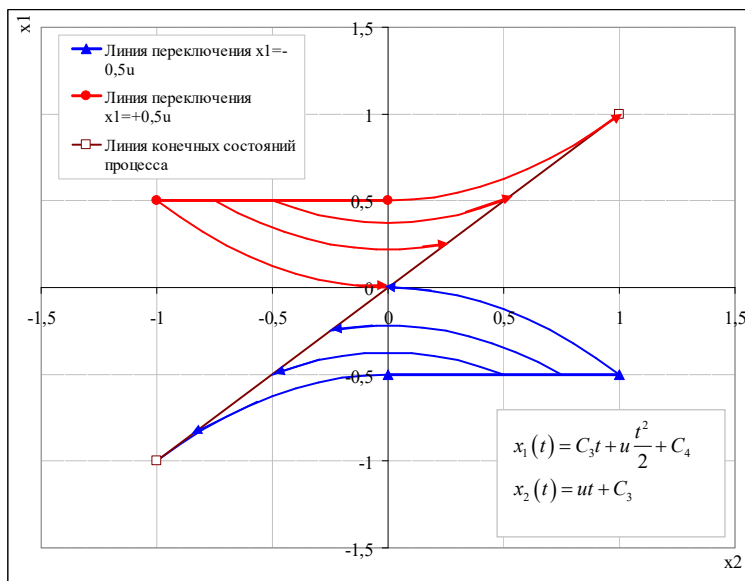


Рис. 2. Решение задачи о поиске оптимального по быстродействию управления с конечным состоянием вида $x_1=x_2$ с применением принципа максимума Понтрягина: $u_{\text{opt}}(t) = \text{sign}(-C_1 t + C_2)$

Универсальность математического описания вида (2) для ряда прикладных задач в области заготовительного производства для машиностроения и металлургии, описана, например, в работе [40]. Можно показать, что аналогичные принципу максимума Понтрягина результаты могут быть получены непосредственно из СДУ вида (1) при выполнении ряда процедур. Однако прежде следует сделать ряд комментариев относительно используемой ниже терминологии. В отношении входящей в описание (1) и (2) величины $u(t)$ зачастую применяют термин «управление». В контексте рассматриваемой задачи он не может быть признан удачным, т. к. по своему содержанию «управление» предполагает действие. Величина же $u(t)$, входящая в СДУ, – физическая величина, имеющая свою размерность. Это может быть сила F или момент сил M , действующих на механическую систему, давление масла в гидросистеме или сжатого воздуха в пневмосистеме p , перепад давления в пневмосистеме Δp , напряжение U или силы тока I и т. д. Поэтому целесообразно вместо термина «управление» использовать термин «управляющий параметр». Связь между этими двумя понятиями может выражаться следующим образом. Каждому диапазону управляющего параметра соответствует определенная ступень переключателя управления. В этом случае выбор определенной ступени в заданный момент времени соответствует управлению, приводящему к изменению физической величины управляющего воздействия. Последнее, в свою очередь, изменяет фазовую траекторию системы. Учитывая это, задача поиска

оптимального управления может быть решена следующим образом. Придавая значениям управляющего параметра фиксированные значения $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ и решая СДУ, определяется величина времени, необходимого для достижения заданного конечного состояния, при фиксированном значении управляющего параметра. По полученному набору численных решений строится зависимость $t=f(u)$, на основании которой решается задача минимизации. Нахождение искомого в данном случае параметра t для каждого фиксированного u может быть получено из решения СДУ (2) на основании системы уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 = (a_0 + a_1 x_2(0))t + a_1 b u \frac{t^2}{2} + x_1(0), \\ x_2 = but + x_2(0), \\ x_1 - \xi x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Третье уравнение системы (3) представляет собой аналитическое описание конечного состояния и может иметь любой вид, в зависимости от специфики задачи.

В этом случае время t , необходимое для перевода системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, описываемое третьим уравнением системы (3), может быть определено по одному из альтернативных уравнений:

$$t = \frac{x_1 - x_1(0)}{a_0 + a_1 x_2(0)}, \quad (4)$$

$$t = \frac{x_2 - x_2(0)}{u}. \quad (5)$$

Следует отметить, что при $u=0$ необходимо применять уравнение (4), а во всех остальных случаях – уравнение (5).

При $a_0=1, a_1=1, b=1, \xi=1$ СДУ (2) приобретает вид СДУ (1) и, не принимая во внимание описание конечного состояния, имеет простой и понятный физический смысл – перемещение материальной точки силой F , выступающей в роли управляющего параметра. Фактически речь идет об основном уравнении динамики. Задавая значения F в диапазоне от 0Н до 10Н с шагом 2Н, и ставя в соответствие им значения $u=(u_0, \dots, u_5)$, при решении системы (3) можно увидеть, что оптимальное решение для $t=t_{\text{min}}$ получается при $F=F_{\text{max}}=u_5$. Этот вывод не противоречит физическому смыслу задачи и находится в полном соответствии с принципом максимума Понтрягина, в чем несложно убедиться с использованием геометрического его толкования. На рис. 3 показан пример зависимости $t=f(u)$ для произвольного начального состояния $x_1(0)=0,45$ м, $x_2(0)=0,55$ м/с, из которого видно, что время достижения конечного состояния с увеличением значения управляющего параметра падает, достигая своего минимального значения на его границе. Такие же по сути результаты получаются для любого начального состояния системы.

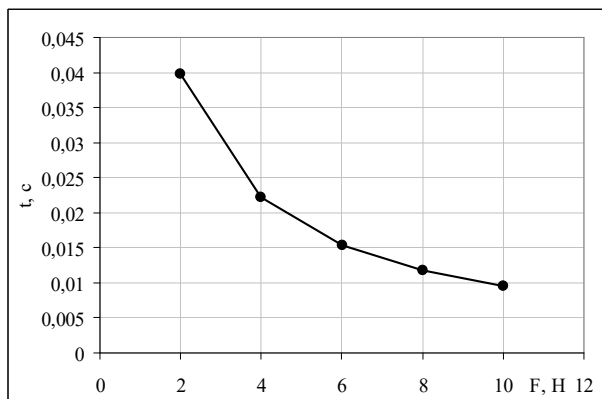


Рис. 3. Зависимости $t=\varphi(u)$ для начального состояния $x_1(0)=0,45$ м, $x_2(0)=0,55$ м/с

Это означает, что путем совместного решения системы уравнений (3) для каждого из фиксированных значений управляющего параметра, с использованием (4) или (5), и последующей минимизации функции $t=\varphi(u)$, можно получить оптимальное в смысле быстродействия решение, не прибегая непосредственно к принципу максимума Понтрягина. Полученные при этом результаты с ним полностью согласуются. Очевидно, что определяющим для выбора оптимального управления является положение точки, характеризующей фактическое положение начального состояния относительно линии конечного состояния. В случае, если она представляет собой прямую, можно привести ее описание к нормальному виду стандартным способом с использованием нормирующего множителя. При этом знак отклонения соответствующей точки фазового пространства от линии конечного состояния определит необходимый знак управления. Для пространства $(N \times 2)$ это может быть выражено в следующей форме:

$$d_i(x_{1i}, x_{2i}) < 0 \rightarrow u < 0, \quad d_i(x_{1i}, x_{2i}) > 0 \rightarrow u > 0, \quad (6)$$

где $d_i(x_{1i}, x_{2i})$ – величина отклонения точки, описывающей начальное состояние, от линии конечного состояния.

Выбор оптимального управления в данном случае сводится к расчету величины $d_i(x_{1i}, x_{2i})$.

Однако при этом остается один невыясненный вопрос. А именно, достижение конечного состояния как самоцель не всегда хороша для управления технологическими процессами. Для таких процессов требование быстродействия должно выполняться лишь тогда, когда приоритетным является длительность выполнения технологической операции в составе цикла. Данное требование связано напрямую с таким критерием качества управления, как производительность. В этом случае момент достижения конечного состояния, трактуемый например как время, необходимое для получения технологического продукта в заданном объеме, должен соответствовать моменту его выдачи, в общем случае на технологическую линию. Однако, достигая конечного состояния, объект продолжает свое движение по фазовым траекториям, уходя с линии конечного состояния. Для иллюстрации этого достаточно проанализировать поведение объекта на основе решения системы уравнений (3). В качестве примера такой иллюстрации приведены рис. 4, 5, по-

казывающие поведение объекта при отрицательном управлении ($u < 0$, рис. 4) и положительном управлении ($u > 0$, рис. 5).

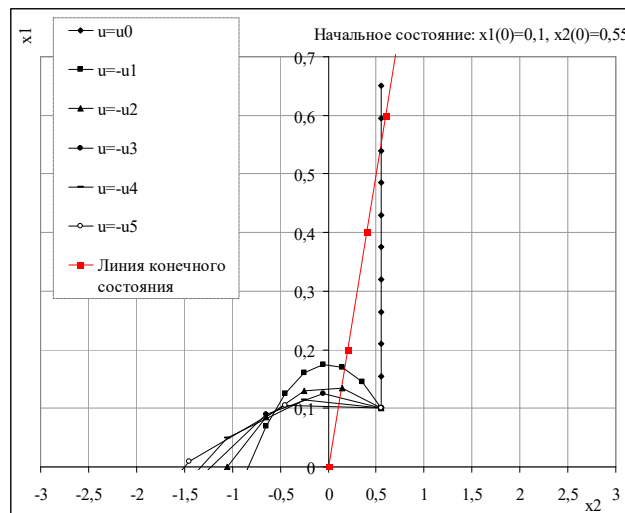


Рис. 4. Поведение объекта при отрицательном управлении ($u < 0$)

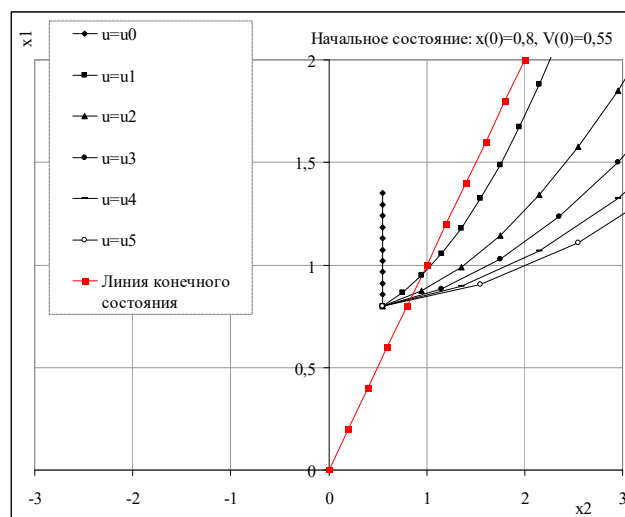


Рис. 5. Поведение объекта при положительном управлении ($u > 0$)

Исходя из этого, необходимо расширить критерий качества управления, добавив к требованию достижения конечного состояния за минимальное время требование удержания объекта в заданной области конечного состояния в течение необходимого времени. Это требование имеет простой технологический смысл, который заключается в следующем. Если необходима задержка с выдачей технологического продукта на линию, то объект должен оставаться в конечном состоянии в течение заданного промежутка времени. При этом возможна еще одна ситуация – на момент выдачи продукта на линию его качество не соответствует заданному и доведение его до заданных показателей качества требует определенного времени. Если объем продукта при этом соответствует требуемому, время выдержки для доведения продукта до заданных показателей предполагает удержание объекта в области конечного состояния в течение этого периода

времени. Может быть предложено такое решение данной задачи. Пусть область конечного состояния имеет нижнюю и верхнюю допустимые границы, линия же конечного состояния описывается уравнением $x_1 = x_2$. Тогда уравнение нижней допустимой области имеет вид $x_1 = -\delta + x_2$, а уравнение верхней допустимой области имеет вид $x_1 = \delta + x_2$. Здесь δ – допустимый интервал варьирования переменной x_1 .

Фазовая траектория системы при выборе в качестве математической модели СДУ вида (1) при выбранном управлении пересекает ее в двух точках. Соответственно, время достижения объектом нижней границы допустимой области является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_2(0)t + u \frac{t^2}{2} + x_1(0), \\ x_2 = ut + x_2(0), \\ x_1 = -\delta + x_2, \end{cases} \quad (7)$$

а время достижения объектом верхней границы допустимой области является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_2(0)t + u \frac{t^2}{2} + x_1(0), \\ x_2 = ut + x_2(0), \\ x_1 = \delta + x_2. \end{cases} \quad (8)$$

Поэтому существует, по меньшей мере, два варианта синтеза управления. Исходными данными для обоих вариантов является фактическое начальное состояние, в котором находится технологическая система/технологический процесс. В зависимости от этого, в соответствии с (6) выбирается знак управления.

Вариант № 1

Как только объект достигает верхней допустимой области конечного состояния, выполняется управляющее воздействие (или подается сигнал управления) соответствующего знака. Данный момент времени t_{s1} , следовательно, соответствует первому переключению, а координаты объекта в данный момент времени соответствуют новому начальному состоянию. Иными словами, если предыдущее начальное состояние имело вид $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1(i-1), x_2(i-1))$, то новое начальное состояние, в которое попадает объект при достижении верхней границы допустимой области конечного состояния в момент времени t_{s1} , имеет вид $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1(i), x_2(i))$. Таким образом, в отношении начального состояния можно оперировать понятиями «предшествующее состояние» и «последующее состояние». В результате этого фазовая траектория изменяется, и объект движется к нижней границе допустимой области. Как только объект ее достигает, снова выполняется управляющее воздействие (или подается сигнал управления) соответствующего знака. Мо-

мент времени переключения соответствует t_{s2} , а точка пересечения фазовой траектории и нижней границы допустимой области формирует новое начальное состояние $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1(i+1), x_2(i+1))$. И т. д. до тех пор, пока не удастся удержать систему в заданном диапазоне $\pm\delta$ в течение заданного времени. Последнее соответствует требованиям технологического процесса по объему и качеству технологического продукта.

Описанный принцип построения управления продемонстрирован на рис. 6, а результаты применения для СДУ вида (1) – на рис. 7.

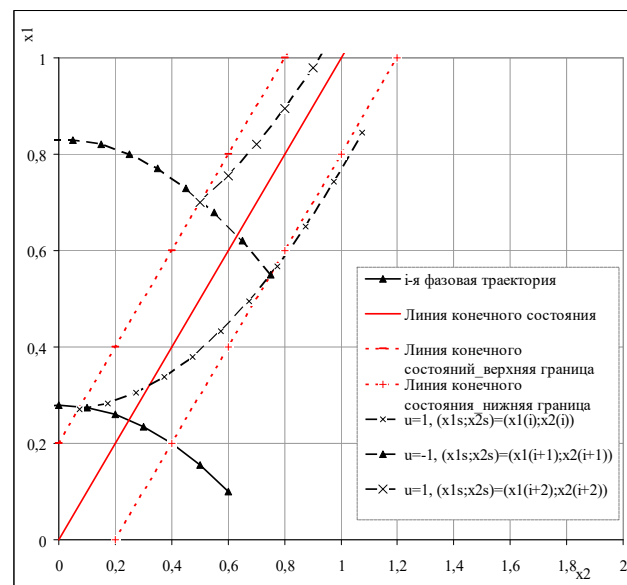


Рис. 6. Принцип синтеза управления для варианта № 1

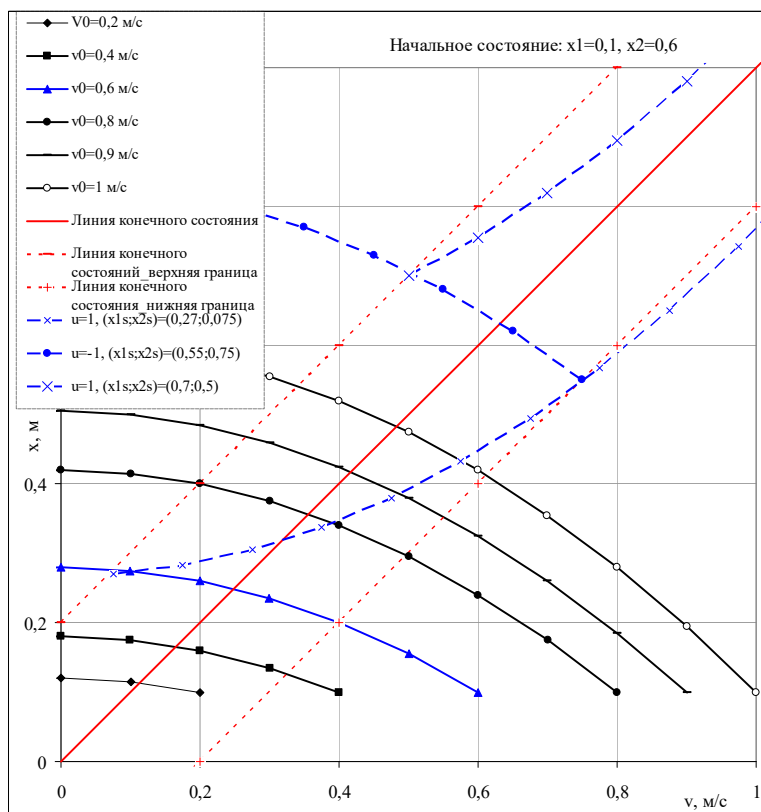


Рис. 7. Построения управления для СДУ вида (1), описывающей перемещение материальной точки

Вариант № 2

Как только объект достигает нижней допустимой области конечного состояния, управляющее воздействие (или сигнал управления) снимается. Это равносильно заданию нулевого значения управляющего параметра ($u=0$). В соответствии с (1), объект, имеющий отличную от нуля начальную скорость, продолжает двигаться равномерно. Данный момент времени t_{s1} , следовательно, соответствует отключению, а координаты объекта в данный момент времени соответствуют новому начальному состоянию. Как только объект, двигающийся равномерно, достигает верхней границы допустимой области конечного состояния, выполняется управляющее воздействие (или подается сигнал управления) соответствующего знака и фазовая траектория начинает меняться. Момент времени нового отключения, соответствующий t_{s2} , наступает тогда, когда фазовая траектория пересекает нижнюю границу допустимой области. При этом формируется новое начальное состояние ($x_1(i+1), x_2(i+1)$). И т. д. до тех пор, пока не удастся удержать систему в заданном диапазоне $\pm\delta$ в течение заданного времени.

Описанный принцип построения управления продемонстрирован на рис. 8.

Результаты синтеза управления для варианта № 1 приведены на рис. 9, а для варианта № 2 – на рис. 10.

На основании полученных результатов синтеза управления для двух вариантов может быть проведено их сравнение и сделан выбор в пользу того, который обеспечивает лучшие показатели по стабилизации объекта. Последние могут оцениваться, например, временем пребывания объекта (технологиче-

ской системы) внутри допустимой области конечного состояния.

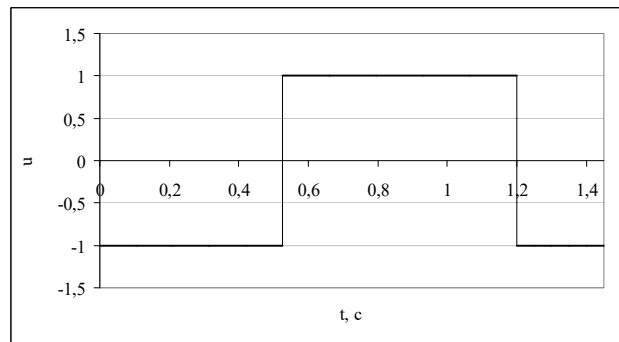


Рис. 9. Результаты синтеза управления для варианта № 1

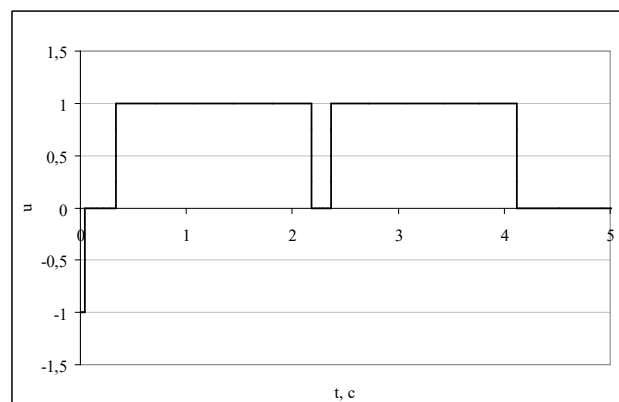


Рис. 10. Результаты синтеза управления для варианта № 2

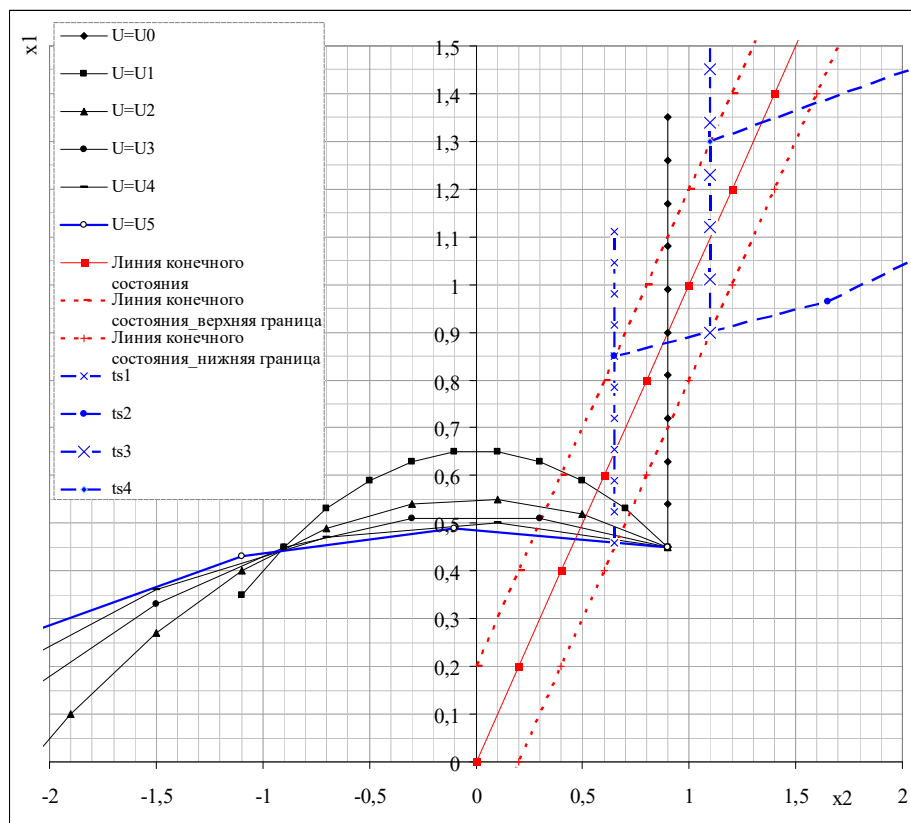


Рис. 8. Принцип синтеза управления для варианта № 2

5. Синтез мультиальтернативного описания конечного состояния системы в задаче поиска оптимального управления

Выбор конечного состояния однозначно зависит от решаемой задачи и применительно к управлению технологическими процессами должен учитывать требования, предъявляемые в конкретных условиях. Определяющим является наличие качественной математической модели объекта управления, поэтому проблемам математического моделирования для конкретных технологических задач уделяется особое внимание. Описание ряда таких прикладных исследований может быть найдено:

– в работах [41, 42], посвященных моделированию для поиска оптимального управления процессами бурения;

– в работах [43–45], посвященных моделированию и управлению в технологиях выращивания кристаллов;

– в работах [46–48], посвященных моделированию и идентификации контролируемых объектов с использованием анализа интервальных множеств и исследованиям сходимости решения экстремальной задачи при ограничениях.

Все они объединены общим представлением о том, что моделирование и управление реальными объектами сопряжены с преодолением объективных трудностей, вызванных нечетким описанием и необходимостью учета существенной, зачастую многоуровневой, неопределенности. Некоторые обобщения таких задач могут быть найдены в работе [49], а общие принципы их решения – в работе [50].

В том случае, если адекватная математическая модель технологического процесса неизвестна, она может быть получена, по меньшей мере, двумя способами. Первый из них – на основе реализации активного эксперимента, в результате которого оцениваются значения коэффициентов уравнения регрессии, описывающего влияние входных переменных на выходные переменные. Последующее проведение процедур экспериментальной оптимизации позволяет получить описание стационарной области на основе расчета соответствующих коэффициентов уравнения регрессии a_i [51]:

$$a_i = c_1 \sum_{j=1}^N x_i^j y^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$a_i = c_2 [(x_{i-n}^j)^2 - \beta] y^j, \quad i = n+1, \dots, 2n, \quad (12)$$

$$a_i = c_3 \sum_{j=1}^N x_\mu^j x_\lambda^j y^j, \quad i = 1, \dots, n, \mu \neq \lambda, \quad i = 2n+1, \dots, k, \quad (13)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^j - \beta \sum_{j=1}^N a_{n+i}. \quad (14)$$

В формулах (11)–(14) c_1, c_2, c_3 – коэффициенты для линейных, квадратичных и парных взаимосвязей соответственно, μ, λ – индексы в описании оценок коэффициентов для парных взаимодействий, n – число линейных членов уравнения, N – число экспериментов, β – параметр, рассчитываемый в зависимости от

числа точек ядра композиционного плана 2^{n-p} , плеча «звездных» точек α и числа точек плану по формуле

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^N (x_i^j)^2}{N} = \frac{2^{n-p} + \alpha}{N}. \quad (15)$$

Второй – на основе обработки экспериментальных данных пассивного эксперимента методом наименьших квадратов (МНК), причем эти данные должны быть получены непосредственно с действующего производства. При этом математическая модель представляет собой уравнение регрессии, функционал наименьших квадратов имеет вид

$$J = (FA - Y)^T (FA - Y), \quad (16)$$

а минимизирующий (16) вектор оценок коэффициентов рассчитывается по формуле

$$A = (F^T F)^{-1} F^T Y. \quad (17)$$

Здесь F – матрица плана эксперимента, A – матрица оценок коэффициентов уравнения регрессии, Y – матрица значений выходных переменных, представляющая собой вектор-столбец значений результирующего параметра в i -м эксперименте.

Примеры получения таких описаний на основе промышленных данных могут быть найдены в работах [52–54].

Таким образом, если адекватная математическая модель технологического процесса получена любой из приведенных выше процедур, то описание конечного состояния может быть решением оптимизационной задачи. Последняя формулируется следующим образом: необходимо найти такие значения входных переменных, которые обеспечивают максимум или минимум значения заданной выходной переменной. Для этого целесообразно воспользоваться специальной процедурой исследования поверхности отклика. Речь идет о гребневом анализе («ридж»-анализе). При этом в качестве конечного состояния предлагается использовать параметрическое описание вида

$$\begin{cases} x^*(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} a, \\ r(\lambda) = \sqrt{x^* x^*}, \\ y^*(\lambda) = a_0 + 2a^* x^* + x^* A x^*, \end{cases} \quad (9)$$

где a_0, a, A – оценки коэффициентов в уравнении регрессии, $x_i^* = \frac{a_i}{2\lambda}$ – субоптимальные значения входных переменных – в задачах поиска оптимального управления технологическими процессами – переменных состояния, $r = \sqrt{r^2}$, $r^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{2\lambda} \right)^2$ – ограничения в факторном пространстве, $y^* = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2\lambda}$ – субоптимальные значения выходной переменной.

Учитывая особенности ридж-анализа, связанные с получением множества субоптимальных значений выходной переменной, формируется несколько альтернативных вариантов описания конечного состояния. Каждое из них для факторного пространства ($N \times 2$) пред-

ставляет собой кривую вида $x_1=f(x_2)$, описывающую множество субоптимальных значений входных переменных, обеспечивающих заданные значения выходной переменной. Иными словами, каждое из описаний конечного состояния, по сути, формирует требования к качеству технологического продукта. Формируемое таким образом мультиальтернативное конечное состояние требует решения задачи выбора того из них, относительно которого и следует искать оптимальное управление.

Иллюстрация решения оптимизационной задачи в параметрическом виде (9) и получение на основании его мультиальтернативного описания конечного состояния приведена на рис. 11–13. На рис. 13 показан также принцип выбора конечного состояния, относительно которого следует искать оптимальное управление.

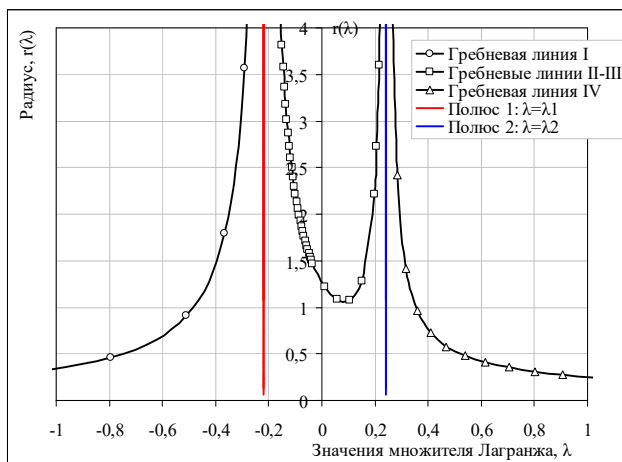


Рис. 11. Параметрическое описание ограничений

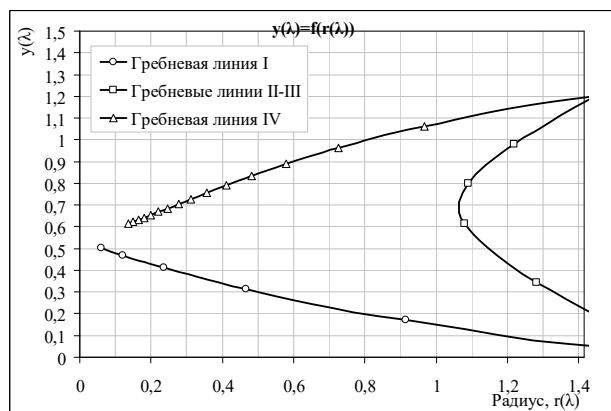


Рис. 12. Линии гребней — кривые, описывающие множество субоптимальных значений

Очевидно, поиск оптимального управления следует вести относительно ближайшей линии конечного состояния. При этом если линия представляет собой прямую, то расстояние может быть определено известным способом

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{1j} - x_{10})^2 + (x_{2j} - x_{20})^2}, \quad (10)$$

где x_{1j} , x_{2j} — координаты точек, лежащие на линии конечного состояния, x_{10} , x_{20} — координаты точки, описывающей начальное состояние.

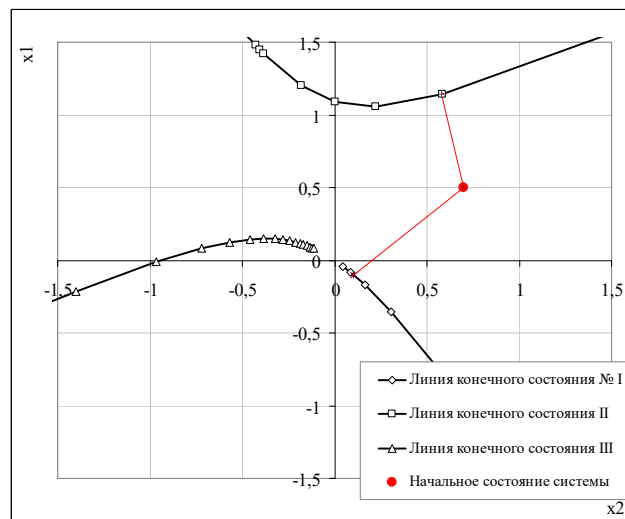


Рис. 13. Принцип мультиальтернативного описания конечного состояния и принцип выбора конечного состояния, относительно которого целесообразно вести поиск оптимального управления

6. Обсуждение результатов исследования метода синтеза оптимального управления, основанного на анализе математической модели объекта управления и мультиальтернативном описании конечного состояния

Предложенный метод поиска оптимального управления технологическими процессами, основанный на анализе решения СДУ, обладает тем преимуществом, что является достаточно простым. При этом получаемые с его применением решения полностью согласуются с результатами, получаемые с применением принципа максимума Понтрягина. Следует отметить его отличительную особенность, связанную с возможностью решения задачи стабилизации объекта управления — технологического процесса, — понимаемой в смысле удержания его параметров внутри заданной области в течение необходимого времени. Речь идет о том, что если момент времени, минимальный для перехода из фактического начального состояния в конечное, соответствует моменту времени выдачи технологического продукта, то приоритетным является именно быстроедействие. При этом полученные решения по поиску оптимального в смысле быстрогодействия управления являются искомыми.

Если параметры технологического процесса должны соответствовать заданным в течение какого-то интервала времени, например до выдачи технологического продукта, то оптимальным будет считаться управление, максимизирующее время пребывания их значений внутри заданной области. Здесь речь может идти также о минимизации нового времени достижения заданной области, если фазовая траектория уходит за ее пределы. В этом случае принципиально возможны, по меньшей мере, два альтернативных варианта реализации управления, отличающиеся принципом выбора моментов переключения управления. Очевидно, что определяющим фактором для выбора оптимального управления в данном случае является начальное состояние системы, описываемое положением точки фазового пространства, характеризующей

фактическое начальное состояние, относительно линии конечного состояния.

В этой связи, следует заметить, что при решении реальных технологических задач в условиях промышленного серийного производства зачастую имеет место неопределенность в оценке начального состояния системы, от которого и зависит положение фазовой траектории при выбранном управлении. Очевидно, что, говоря при этом о поиске оптимального управления, речь идет не об оптимальных значениях управляющего параметра (оно соответствует своей граничной величине $|u(t)|=1$), а о знаке управления. Его же выбор зависит от положения начального состояния системы относительно линии конечного состояния. Более того, зачастую начальное состояние технологической системы, как объекта управления, может быть определено только со сдвижкой во времени, связанного с проведением необходимых лабораторных испытаний технологического продукта. Это означает, что выбор управления должен учитывать наличие такого временного дрейфа и в момент управляющего воздействия система уже перешла из своего начального (предыдущего) состояния в последующее. Оценка последнего является отдельной, самостоятельной задачей, но без ее решения выбор оптимального в данный момент времени управления под вопросом.

Предложенная процедура оценивания начального состояния относительно конечного, основанная на приведении прямой, описывающей конечное состояние, к нормальному виду, достаточно проста и позволяет однозначно определять знак управления. Если линия конечного состояния не описывается уравнением прямой, возможны и другие варианты оценивания, однако суть при этом остается одной и той же — необходимо оценить положение точки фазового пространства относительно конечного состояния.

Из всего этого следует, что процедуре синтеза оптимального управления технологическим процессом должна предшествовать процедура получения описания конечного состояния. В случае применения параметрического описания вида (9) возникает мультиальтернативность в выборе конечного состояния. Как следует из предложенного принципа выбора (рис. 13), наиболее целесообразным будет выбор той линии конечного состояния, к которой ближе находится начальное состояние.

Необходимо отметить, что предложенный метод поиска оптимального управления, основанный на анализе решений СДУ как математической модели объекта управления, не учитывает такой важный критерий качества управления как минимизация энергозатрат. Это является его очевидным недостатком и возможным направлением развития. Предложенный принцип выбора конечного состояния в условиях его мультиальтернативности хоть и представляется эффективным, все же не лишен очевидного недостатка. Он связан с требованием представления математической

модели технологического процесса в виде уравнения регрессии. Понятно, что при наличии малой выборки экспериментальных данных, а также неопределенности в описании входных переменных получение адекватной математической модели для последующего параметрического мультиальтернативного описания является сложной задачей. Очевидно, указанные недостатки формируют потенциально интересные направления развития предложенного метода.

7. Выводы

1. Предложенный метод поиска оптимального по быстродействию и конечному состоянию управления технологическими процессами, основанный на анализе решения СДУ, позволяет при своей достаточной простоте получать решения, полностью согласующиеся с результатами, получаемые с применением принципа максимума Понтрягина. При этом он открывает дополнительные возможности в решении задачи удержания параметров технологического процесса внутри заданной области. Показано, что для этого существует, по меньшей мере, два альтернативных варианта реализации управления, отличающиеся принципом выбора моментов переключения управления. Определяющим фактором для выбора оптимального управления в данном случае является начальное состояние системы, описываемое положением точки фазового пространства, характеризующей фактическое начальное состояние, относительно линии конечного состояния. При этом понятие «начальное состояние» заменяется эквивалентным понятием «предшествующее состояние», более подходящим для описания технологического процесса в контексте поиска оптимального управления. Предложено для этого, в случае, если конечное состояние описывается уравнением прямой, приводить его к нормальному виду. В результате этого можно рассчитывать с учетом знака соответствующее отклонение точки предшествующего состояния от этой прямой, однозначно определяющее знак управления.

2. Предложено получать мультиальтернативное параметрическое описание конечного состояния для поиска оптимального управления технологическим процессом с применением «ридж»-анализа. Показано, что каждая из альтернатив представляет собой множество субоптимальных значений выходной переменной, обеспечивающее оптимальные в выбранном смысле значения выходной переменной. Последние формируются требованиями к качеству готового технологического продукта. Показано, что при синтезе оптимального управления в случае такой мультиальтернативности описания конечного состояния наиболее целесообразно выбирать то из них, относительно которого в фазовом пространстве ближе всего находится точка, описывающая предшествующее состояние технологической системы.

Литература

1. Луценко, И. А. Практический подход к выбору критерия оптимального управления [Текст] / И. А. Луценко // Технологический аудит и резервы производства. — 2014. — Т. 2, № 1 (16). — С. 32–35. doi: 10.15587/2312-8372.2014.23432
2. Труфанов, И. Д. Общетеоретические аспекты разработки стохастической системы автоматизированной экспертной оценки динамического качества производственных ситуаций электросталеплавления [Текст] / И. Д. Труфанов, К. И. Чумаков, А. А. Бондаренко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2005. — Т. 6, № 2 (18). — С. 52–58.

3. Труфанов, И. Д. Энергосберегающее управление электротехнологическим комплексом как база повышения энергоэффективности металлургии стали [Текст] / И. Д. Труфанов, В. П. Метельский, К. И. Чумаков, О. Ю. Лозинский, Я. С. Паранчук // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2008. – Т. 6, № 1 (36). – С. 22–29.
4. Lutsenko, I. Identification of target system operations. The practice of determining the optimal control [Text] / I. Lutsenko, E. Fomovskaya // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 6, Issue 2 (78). – P. 30–36. doi: 10.15587/1729-4061.2015.54432
5. Lutsenko, I. Development of the method for testing of efficiency criterion of models of simple target operations [Text] / I. Lutsenko, E. Vihrova, E. Fomovskaya, O. Serdiuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 2, Issue 4 (80). – P. 42–50. doi: 10.15587/1729-4061.2016.66307
6. Lutsenko, I. Identification of target system operations. Development of global efficiency criterion of target operations [Text] / I. Lutsenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 2, Issue 2 (74). – P. 35–40. doi: 10.15587/1729-4061.2015.38963
7. Lutsenko, I. Synthesis of cybernetic structure of optimal spooler [Text] / I. Lutsenko, E. Fomovskaya // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 9. – P. 297–301.
8. Дилигенский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология [Текст] / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
9. Hong, D. H. Fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data using shape-preserving operations [Text] / D. H. Hong, S. Lee, H. Y. Do // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol. 122, Issue 3. – P. 513–526. doi: 10.1016/S0165-0114(00)00003-8
10. Yang, M.-S. Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input-output data [Text] / M.-S. Yang, T.-S. Lin // Fuzzy Sets and Systems. – 2002. – Vol. 126, Issue 3. – P. 389–399. doi: 10.1016/S0165-0114(01)00066-5
11. Seraya, O. V. Linear Regression Analysis of a Small Sample of Fuzzy Input Data [Text] / O. V. Seraya, D. A. Demin // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. – Vol. 44, Issue 7. – P. 34–48. doi: 10.1615/jautomatinfscien.v44.i7.40
12. Tseng, Y.-T. Comparison of objective functions for batch crystallization using a simple process model and Pontryagin's minimum principle [Text] / Y.-T. Tseng, J. D. Ward // Computers & Chemical Engineering. – 2017. – Vol. 99. – P. 271–279. doi: 10.1016/j.compchemeng.2017.01.017
13. Дёмин, Д. А. Синтез систем управления технологическими процессами электродуговой плавки чугуна [Текст] / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 2, № 10 (56). – С. 4–9. – Режим доступа: <http://journals.urau.ru/eejet/article/view/3881/3557>
14. Demin, D. A. Synthesis of optimal temperature regulator of electroarc holding furnace bath [Text] / D. A. Demin // Scientific Bulletin of National Mining University. – 2012. – Issue 6. – P. 52–58.
15. Ozatay, E. Velocity profile optimization of on road vehicles: Pontryagin's Maximum Principle based approach [Text] / E. Ozatay, U. Ozguner, D. Filev // Control Engineering Practice. – 2017. – Vol. 61. – P. 244–254. doi: 10.1016/j.conengprac.2016.09.006
16. Saerens, B. Calculation of the minimum-fuel driving control based on Pontryagin's maximum principle [Text] / B. Saerens, E. Van den Bulck // Transportation Research Part D: Transport and Environment. – 2013. – Vol. 24. – P. 89–97. doi: 10.1016/j.trd.2013.05.004
17. Bauer, S. Thermal and energy battery management optimization in electric vehicles using Pontryagin's maximum principle [Text] / S. Bauer, A. Suchanek, F. P. Leon // Journal of Power Sources. – 2014. – Vol. 246. – P. 808–818. doi: 10.1016/j.jpowsour.2013.08.020
18. Onori, S. Adaptive Pontryagin's Minimum Principle supervisory controller design for the plug-in hybrid GM Chevrolet Volt [Text] / S. Onori, L. Tribioli // Applied Energy. – 2015. – Vol. 147. – P. 224–234. doi: 10.1016/j.apenergy.2015.01.021
19. Fang, H. Structural optimization of double-tube once-through steam generator using Pontryagin's Maximum Principle [Text] / H. Fang, X. Wei, F. Zhao // Progress in Nuclear Energy. – 2015. – Vol. 78. – P. 318–329. doi: 10.1016/j.pnucene.2014.09.008
20. Candido, J. J. Modelling, control and Pontryagin Maximum Principle for a two-body wave energy device [Text] / J. J. Candido, P. A. P. S. Justino // Renewable Energy. – 2011. – Vol. 36, Issue 5. – P. 1545–1557. doi: 10.1016/j.renene.2010.11.013
21. Красовский, А. А. Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста [Текст] / А. А. Красовский, А. М. Тарасьев // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 10. – С. 38–52.
22. Ohsawa, T. Contact geometry of the Pontryagin maximum principle [Text] / T. Ohsawa // Automatica. – 2015. – Vol. 55. – P. 1–5. doi: 10.1016/j.automatica.2015.02.015
23. Blot, J. Pontryagin principle for a Mayer problem governed by a delay functional differential equation [Text] / J. Blot, M. I. Kone // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol. 444, Issue 1. – P. 192–209. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.06.027
24. Pereira, F. L. A Maximum Principle for Constrained Infinite Horizon Dynamic Control Systems [Text] / F. L. Pereira, G. N. Silva // IFAC Proceedings Volumes. – 2011. – Vol. 44, Issue 1. – P. 10207–10212. doi: 10.3182/20110828-6-it-1002.03622
25. Stecha, J. Stochastic maximum principle [Text] / J. Stecha, J. Rathousky // IFAC Proceedings Volumes. – 2011. – Vol. 44, Issue 1. – P. 4714–4720. doi: 10.3182/20110828-6-it-1002.01501
26. Arutyunov, A. V. Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems [Text] / A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, F. Pereira // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2012. – Vol. 75, Issue 3. – P. 1045–1057. doi: 10.1016/j.na.2011.04.047

27. Хлопин, Д. В. О гамильтониане в задачах управления на бесконечном промежутке [Текст] / Д. В. Хлопин // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 4. – С. 295–310. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-295-310
28. Ballestra, L. V. The spatial AK model and the Pontryagin maximum principle [Text] / L. V. Ballestra // Journal of Mathematical Economics. – 2016. – Vol. 67. – P. 87–94. doi: 10.1016/j.jmateco.2016.09.012
29. Трегуб, В. Г. Оптимальне керування періодичними процесами з міжфазними переходами [Текст] / В. Г. Трегуб, Ю. О. Чорна // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – Т. 6, № 4 (48). – С. 10–12. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3270/3072>
30. Коцур, М. П. Математичне моделювання та оптимізація процесу нестационарного термоелектричного охолодження [Текст] / М. П. Коцур // Технологический аудит и резервы производства. – 2016. – Т. 1, № 2 (27). – С. 29–34. doi: 10.15587/2312-8372.2016.59320
31. Левчук, И. Л. Управление процессом каталитического риформинга путем оптимального распределения температур на входах реакторов [Текст] / И. Л. Левчук // Технологический аудит и резервы производства. – 2015. – Т. 2, № 4 (22). – С. 56–60. doi: 10.15587/2312-8372.2015.40592
32. Musaev, A. Intelligent Control Systems for Refinery Technological Processes [Text] / A. Musaev // Proceedings of conf. ICPI'02 (Intelligent computing for the petroleum industry). – Mexico, 2002. – Vol. 2. – P. 6–17.
33. Мусаев, А. А. Виртуальные анализаторы: концепция построения и применения в задачах управления непрерывными технологическими процессами [Текст] / А. А. Мусаев // Автоматизация в промышленности. – 2003. – № 8. – С. 28–33.
34. Дёмин, Д. А. Методология формирования функционала для задачи оптимального управления электроплавкой [Текст] / Д. А. Дёмин // Технологический аудит и резервы производства. – 2011. – Т. 1, № 1 (1). – С. 15–24. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/4082/3748>
35. Мусаев, А. А. Оптимальное управление процессом смещения товарного топлива в потоке [Текст] / А. А. Мусаев, В. А. Никитин // Приборы и системы. – 2007. – № 4. – С. 5–11.
36. Алексеева, Л. Б. Структура взаимодействия виртуального мониторинга с системой управления непрерывным технологическим процессом [Текст]: I междунар. науч.-практ. конф. / Л. Б. Алексеева; ред. С. С. Чернов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – С. 114–118.
37. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высш. Шк., 1989. – 447 с.
38. Дёмин, Д. А. Синтез систем управления технологическими процессами электродуговой плавки чугуна [Текст] / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 2, № 10 (56). – С. 4–9. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3881/3557>
39. Дёмин, Д. А. Адаптивное моделирование в задаче поиска оптимального управления термовременной обработкой чугуна [Текст] / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 6, № 4 (66). – С. 31–37. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/19453/17110>
40. Дёмин, Д. А. Типизация математического описания в задачах синтеза оптимального регулятора технологических параметров литейного производства [Текст] / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – Т. 1, № 4 (67). – С. 43–56. doi: 10.15587/1729-4061.2014.21203
41. Горбійчук, М. І. Спосіб відбору критеріїв оптимальності при адаптивному управлінні процесом буріння [Текст] / М. І. Горбійчук // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Серія: Технічна кібернетика та електрифікація об'єктів паливно-енергетичного комплексу. – 1997. – Вип. 34 (5). – С. 18–23.
42. Горбійчук, М. І. Адаптивне управління процесом поглиблення свердловин [Текст] / М. І. Горбійчук // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Серія: Технічна кібернетика та електрифікація об'єктів паливно-енергетичного комплексу. – 1998. – Вип. 35 (6). – С. 3–9.
43. Суздаль, В. С. Параметрическая идентификация Varmax моделей процесса кристаллизации крупногабаритных монокристаллов [Текст] / В. С. Суздаль, Ю. М. Епифанов, А. В. Соболев, И. И. Тавровский // Науковий вісник КУЕІТУ. – 2009. – № 4 (26). – С. 23–29.
44. Суздаль, В. С. Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией [Текст] / В. С. Суздаль // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 2, № 3 (50). – С. 31–34. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/1745/1642>
45. Суздаль, В. С. Оптимизация задачи синтеза управления для процессов кристаллизации [Текст] / В. С. Суздаль // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 6, № 3 (54). – С. 41–44. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/2247/2051>
46. Zyelyk, Y. I. Simulation and Identification of Controlled Objects with the Use of the Interval-Set Analysis MATLAB Toolbox [Text] / Y. I. Zyelyk, M. M. Lychak, V. N. Shevchenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2003. – Vol. 35, Issue 3. – P. 31–44. doi: 10.1615/jautomatinfscien.v35.i3.40
47. Zyelyk, Y. I. Convergence of a matrix gradient algorithm of solution of extremal problem under constraints [Text] / Y. I. Zyelyk // Journal of Automation and Information Sciences. – 2000. – Vol. 32, Issue 9. – P. 34–41.
48. Zyelyk, Y. I. Convergence of a Matrix Gradient Control Algorithm with Feedback Under Constraints [Text] / Y. I. Zyelyk // Journal of Automation and Information Sciences. – 2000. – Vol. 32, Issue 10. – P. 35–45. doi: 10.1615/jautomatinfscien.v32.i10.50

49. Качанов, П. А. Оптимальное управление состоянием динамических систем в условиях неопределенности [Текст] / П. А. Качанов. – Х.: ХГПУ, 2000. – 209 с.
50. Раскин, Л. Г. Нечеткая математика [Текст]: моногр. / Л. Г. Раскин, О. В. Серая. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с.
51. Хартман, К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов [Текст] / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
52. Demin, D. A. Complex alloying of grey cast iron [Text] / D. A. Demin, V. F. Pelikh, O. I. Ponomarenko // Liteynoe Proizvodstvo. – 1998. – Issue 10. – P. 18–19.
53. Demin, D. A. Optimization of the method of adjustment of chemical composition of flake graphite iron [Text] / D. A. Demin, V. F. Pelikh, O. I. Ponomarenko // Liteynoe Proizvodstvo. – 1995. – Issue 7-8. – P. 42–43.
54. Mohanad, M. K. Modeling of the case depth and surface hardness of steel during ion nitriding [Text] / M. K. Mohanad, V. Kostyk, D. Domin, K. Kostyk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 2, Issue 5 (80). – P. 45–49. doi: 10.15587/1729-4061.2016.65454